

*Usando Kits da Experimentoteca de  
Matemática para aprofundar  
assuntos do Ensino Médio*

***Diego da Silva Oliveira***

***Coordenação: Profa. Dra. Edna Maura Zuffi***

## A ESCOLA

"Escola é...  
o lugar onde se faz amigos  
não se trata só de prédios, salas, quadros,  
programas, horários, conceitos...  
Escola é, sobretudo, gente,  
gente que trabalha, que estuda,  
que se alegra, se conhece, se estima.  
O diretor é gente,  
O coordenador é gente, o professor é gente,  
o aluno é gente,  
cada funcionário é gente.  
E a escola será cada vez melhor  
na medida em que cada um  
se comporte como colega, amigo, irmão.  
Nada de 'ilha cercada de gente por todos os lados'.  
Nada de conviver com as pessoas e depois descobrir  
que não tem amizade a ninguém  
nada de ser como o tijolo que forma a parede,  
indiferente, frio, só.  
Importante na escola não é só estudar, não é só trabalhar,  
é também criar laços de amizade,  
é criar ambiente de camaradagem,  
é conviver, é se 'amarrar nela'!  
Ora , é lógico...  
numa escola assim vai ser fácil  
estudar, trabalhar, crescer,  
fazer amigos, educar-se,  
ser feliz."

**de Paulo Freire**

## *Índice*

Prefácio .....	4
Introdução .....	5
§ 1 – Sudoku .....	5
Capítulo 1 – Matemática e poluição .....	6
§ 1 – Função de 1º grau e representação gráfica .....	6
§ 2 – Logaritmo .....	6
§ 3 – Porcentagem .....	7
Capítulo 2 – Binômio de Newton .....	9
§ 1 – Fatorial .....	9
§ 2 – Números Binomiais .....	9
§ 3 – Triângulo de Pascal .....	10
§ 4 – Curva de Gauss .....	10
Capítulo 3 – Análise combinatória .....	11
§ 1 – Princípio Fundamental da contagem .....	11
§ 2 – Técnicas de contagem .....	11
§ 3 – Arranjos .....	11
§ 4 – Permutação .....	12
§ 5 – Combinação .....	11
§ 6 – Exemplos .....	12
§ 7 – Arranjos Completos .....	12
§ 8 – Permutação com elementos repetidos .....	13
§ 9 – Combinação Completa .....	13
§ 10 – Exemplos .....	13
Capítulo 4 – Probabilidade .....	14
§ 1 – Ponto amostral, espaço amostral e evento .....	14
§ 2 – Conceito de probabilidade .....	14
§ 3 – Probabilidade condicionada .....	14
§ 4 – Eventos independentes .....	15
§ 5 – Intersecção de eventos .....	15
Desafios .....	15
§ 1 – O problema dos chapéus .....	15
Referências Bibliográficas .....	16

## *Prefácio*

Esta apostila foi elaborada com intuito de servir como material de apoio ao minicurso “Usando Kits da Experimentoteca de Matemática para aprofundar assuntos do Ensino Médio”, ministrado no Centro de Divulgação Científico Cultural (CDCC) da USP, em São Carlos. Estes dois materiais, associados, podem ser usados como material de apoio em aulas de álgebra no Ensino Médio.

Os assuntos resumidos na apostila estão na ordem comumente utilizadas nos livros didáticos e podem ser consultados durante a utilização dos kits, após a formalização das idéias, feita pelo professor. No capítulo 1, será vistos os conceitos de função de primeiro grau, logaritmo e porcentagem, como base para trabalharmos o kit 1. No capítulo 2, será tratado o binômio de Newton, que servirá de base para os Kits 3 e 4. No capítulo 3, abordaremos conceitos da análise combinatória para o uso nos kits 7 e 8. E por fim, no capítulo 4, trabalharemos com porcentagem, base para os kits 2 e 5 (<http://educar.sc.usp.br/experimentoteca>)

Gostaria de agradecer o apoio dado pela profa. Dra. Edna Maura Zuffi, na coordenação deste projeto, ao meu companheiro de trabalho, Leandro Augusto Ferreira, e as participantes do minicurso ministrado no CDCC.

## Introdução

### § 1 – Curiosidade: Sudoku

**Como surgiu:** O nome *Sudoku* é a abreviação japonesa para a longa frase, *suuji wa dokushin ni kagiru* (数字は独身に限る) que significa *os dígitos devem permanecer únicos*; e é uma marca registrada da *Nikoli Co. Ltd* no Japão. Em japonês a palavra é pronunciada [su:doku], em português pronuncia-se *sudóku*. Outras editoras japonesas referem-se ao jogo como *colocando os números*, ou como "Nanpure". Algumas editoras não japonesas soletram o título como "Su Doku".

**Como jogar:** O jogo é mais frequentemente uma grade de 9×9, constituída de sub-grades de 3×3 chamadas de *regiões* (outros termos incluem *caixas*, *blocos*, algumas vezes, porém o termo *quadrante* é utilizado, apesar de ser um termo impreciso para uma grade de 3×3). Algumas células já contêm números, chamados *números dados* ou *pistas*. O objetivo é preencher as células vazias, com um número em cada célula, de maneira que cada coluna, linha e região contenham os números 1–9 apenas uma vez. Portanto, na solução do jogo, cada número aparece apenas uma vez em qualquer um dos *sentidos* ou *regiões*, daí os termos "únicos números", que originaram o nome do jogo ou enigma.

**Exemplo:**

		1						
		2		3				4
			5			6		7
5			1	4				
	7						2	
			7	8				9
8		7			9			
4				6		3		
						5		

**Aplicação:** A atração do jogo é que as regras são simples, contudo, a linha de raciocínio requerida para alcançar a solução pode ser complexa. O *Sudoku* é recomendado por alguns educadores como um exercício para o pensamento lógico. O nível de dificuldade pode ser selecionado para combinar com o público. Existem diversas fontes na internet, não ligadas a editoras, que disponibilizam os jogos gratuitamente. (<http://sudoku.hex.com.br/>)

# Capítulo 1 – Matemática e poluição

## § 1 – Função de 1º grau e representação gráfica

Definição

Chama-se função polinomial de 1º grau a toda função  $f: R \rightarrow R$  definida por :

$$f(x) = ax + b, a \in R^* \text{ e } b \in R$$

Como obter um gráfico:

Construir o gráfico da função  $f: R \rightarrow R$  definido por  $f(x) = 2x - 4$  :

Resolução:

Construímos uma tabela atribuindo alguns valores a  $x$  e calculando as imagens correspondentes (podem ser atribuídos valores fracionados ou irracionais, porém, para facilitar os cálculos, utilizaremos números inteiros, pois os coeficientes da expressão de  $f$  são também inteiros).

X	Y = 2X - 4	(x;y)
-1	Y = 2.(-1) - 4 = -6	(-1;-6)
0	Y = 2.0 - 4 = -4	(0;-4)
1	Y = 2.1 - 4 = -2	(1;-2)
2	Y = 2.2 - 4 = 0	(2;0)
3	Y = 2.3 - 4 = 2	(3;2)

Localizamos os pontos obtidos no sistema de coordenadas cartesianas.

## § 2 – Logaritmo

- **Definição de logaritmo:**

Chama-se *logaritmo de  $x$  na base  $a$* , um número  $b$  tal que se elevarmos  $a$  ao expoente  $b$ , obtemos  $x$ :

Exemplo:  $\log_2 8 = 3$  pois  $2^3 = 8$

Generalizando:

$$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$$

$b$  será, portanto, o *logaritmo de  $x$  na base  $a$* , o que significa que  $b$  é o expoente a que deve ser elevado  $a$  para obter  $x$ .

- **Propriedades e regras operatórias:**

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
- $\log_a \left( \frac{u}{v} \right) = \log_a u - \log_a v$
- $\log_a (u^n) = n \cdot \log_a u$
- $\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u$

- **Mudança de base:**

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \quad ; \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

### § 3 – Porcentagem

#### 1- Noção de porcentagem

Porcentagem é uma fração de denominador 100. Assim ao escrevermos  $p\%$  estamos representando o número  $p/100$ .

$$p\% = p/100$$

#### 2- Aumento

$$x + p \% x = (100 + p) \% x = (1 + p/100)x$$

Exemplo:

Aumentar 20% a um valor de  $x$ ;

$$(100 + 20)\% x = 120\% x = (120/100) x = 1,2 x$$

### 3- Desconto

$$x - p \% x = (100 - P) \% x = (1-p/100)x$$

Exemplo:

Descontar 20 % de um valor x:

$$(100 - 20)\% x = 80 \% x = (80/100) x = 0,8 x \text{ ou } x - 20\%x = (1-0,2)x = 0,80x$$



## Capítulo 2 – Binômio de Newton

### § 1 – Fatorial

Dado um número natural  $n$  qualquer, chamamos de *fatorial de  $n$*  ou  *$n$  fatorial*:

- ao número 1 quando  $n=0$  ou  $n=1$ ;
- ao produto de todos os números naturais desde  $n$  até 1 para qualquer  $n > 1$ .  
Indicamos o fatorial de  $n$  por  $n!$

Assim:

$$0! = 1$$

$$4! = 4.3.2.1 = 24$$

$$1! = 1$$

$$5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

$$2! = 2.1 = 2$$

$$n! = n.(n-1).(n-2). \dots .3.2.1$$

### § 2 – Números Binomiais

Dados dois números naturais  $n$  e  $p$ , com  $n \geq p$ , chama-se *número binomial  $n$  sobre  $p$* , indicado por  $\binom{n}{p}$  (lê-se “ $n$ ,  $p$  a  $p$ ”), ao número definido por:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplos

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6.5.4!}{2.1.4!} = 15$$

### Números Binomiais Complementares

Dois números binomiais de mesmo *índice superior* ( $n$ , em  $\binom{n}{p}$ ) são chamados complementares quando a soma dos *índices inferiores* for igual ao superior. Ou seja, são complementares  $\binom{n}{p}$  e  $\binom{n}{n-p}$ .

### Propriedades

- 1- Dois números binomiais complementares são iguais.
- 2- Relação de Stifel: somando dois elementos consecutivos de uma mesma linha de um Triângulo de Pascal, obtemos o elemento da próxima linha situado abaixo desses dois elementos.

Em símbolos:  $\mathbf{C_{n,p} + C_{n,p+1} = C_{n+1,p+1}}$

- 3- Relação de Fermat: permite calcular, de uma maneira muito simples, os coeficientes do desenvolvimento de  $(x+y)^n$ .

### § 3 – Triângulo de Pascal

Colocar os números binomiais ( $n p$ ) em linhas e colunas, de modo que o *índice superior*  $n$  corresponda à  $n$ -ésima linha e o *índice inferior* variem de 0 a  $n$ , conforme a coluna:

A essa disposição dos números binomiais chamamos *Triângulo de Pascal*. Substituindo-se cada número binomial pelo seu valor, o triângulo fica assim:

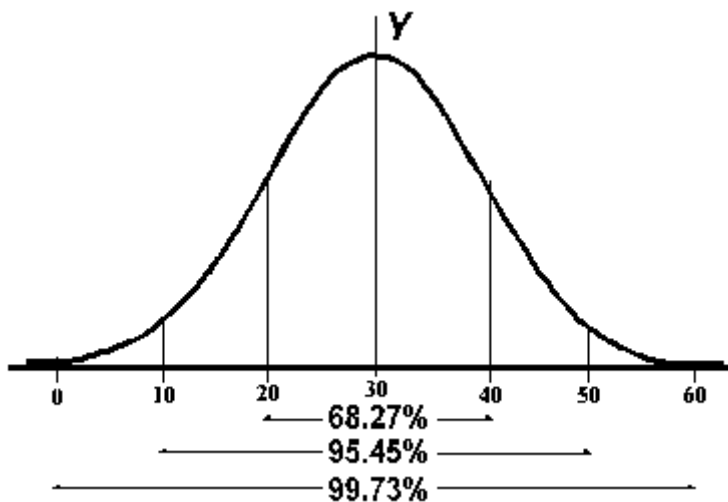
$$\begin{array}{c}
 1 \\
 1 \ 1 \\
 1 \ 2 \ 1 \\
 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\
 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \\
 1 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1 \\
 1 \ 6 \ 15 \ 20 \ 15 \ 6 \ 1 \\
 1 \ 7 \ 21 \ 35 \ 35 \ 21 \ 7 \ 1 \\
 1 \ 8 \ 28 \ 56 \ 70 \ 56 \ 28 \ 8 \ 1
 \end{array}$$

Propriedades

- 1- Em uma mesma linha, dois binômios equidistantes dos extremos são iguais.
- 2- A soma de dois elementos consecutivos de uma mesma linha é igual ao elemento situado abaixo do segundo elemento somado.
- 3- A soma dos elementos da linha de numerador  $n$  é igual a  $2^n$ .

### § 4 – Curva de Gauss

A curva de Gauss tem forma de sino e pode ser construída a partir do Triângulo de Pascal. Ela foi construída pelo matemático Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Ela demonstra a distribuição normal de eventos e se aplica naturalmente a um sistema de premiações. Por exemplo: se tivermos um grupo de trabalhadores tentando atingir metas justas, um pequeno número ficará bem abaixo dos objetivos; a maior parte cumprirá as metas ou se aproximará delas; e um terceiro grupo, limitado, as ultrapassará brilhantemente.



## Capítulo 3 – Análise Combinatória

### § 1 – Princípio fundamental da contagem

Um acontecimento é composto de dois estágios sucessivos e independentes. O primeiro pode ocorrer de  $m$  modos distintos; o segundo estágio pode ocorrer de  $n$  modos distintos. Nestas condições, dizemos que o “o número de maneiras distintas de ocorrer este acontecimento é igual ao produto  $m.n$ ”.

#### Exemplo

Um estudante, ao se inscrever num concurso para vestibular, deve escolher o curso e a faculdade que deseja cursar. Sabe-se que existem cinco cursos possíveis: Engenharia, Medicina, Odontologia, Arquitetura e Direito. Cada curso pode ser feito em três faculdades possíveis: estadual, federal e particular. Qual é o número total de opções que o estudante pode fazer?

(Resolução – tente resolver e depois siga a leitura!)

De acordo com o Princípio Fundamental da Contagem, o número total de opções que os estudantes podem fazer é  $5 \times 3$ , ou seja, 15. Podemos ilustrar estas opções com o auxílio da árvore de possibilidades.

### § 2 – Técnicas de contagem

Seja  $A = \{a; b; c; d; \dots; j\}$  um conjunto formado por 10 elementos distintos, e consideremos os “agrupamentos  $ab$ ,  $ac$ ,  $ca$ ”.

Os agrupamentos  $ab$  e  $ac$  são considerados sempre distintos, pois diferem pela natureza de um elemento.

Os agrupamentos  $ac$  e  $ca$ , que diferem apenas pela ordem de seus elementos, podem ser considerados distintos ou não, conforme a situação que nos interessa para a contagem.

Se, por exemplo, os elementos do conjunto  $A$  forem pontos,  $A = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_{10}\}$ , e ligando estes pontos desejaremos obter retas, então os agrupamentos  $A_1A_2$  e  $A_2A_1$  são iguais, pois representam a mesma reta.

Se, por outro lado, os elementos do conjunto  $A$  forem algarismos,  $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$ , com estes algarismos desejaremos obter números, então os agrupamentos 12 e 21 são distintos, pois representam números diferentes.

### § 3 – Arranjos

São agrupamentos formados com  $p$  elementos, ( $p < m$ ), de um conjunto máximo de  $m$  elementos, de forma que os  $p$  elementos sejam distintos entre si, pela ordem ou pela espécie.

$$A_s(n, p) = n! / (n-p)!$$

#### § 4 – Permutação

**Quando formamos agrupamentos com  $m$  elementos, de forma que os  $m$  elementos sejam distintos entre si pela ordem.**

$$P_s(m) = m!$$

#### § 5 – Combinação

Quando formamos agrupamentos com  $p$  elementos,  $p < m$ , de forma que os  $p$  elementos sejam distintos entre si apenas pela espécie.

$$C(n, p) = n! / [(n-p)! p!]$$

#### § 6 - Exemplos:

- 1- Organiza-se um campeonato de futebol com 20 clubes, sendo a disputa feita em dois turnos, para que cada clube enfrente outro no seu campo e no campo desses. Quantos jogos serão realizados? (380)
- 2- Organiza-se um campeonato de futebol com 20 clubes, sendo a disputa feita em turno único. Quantos jogos serão realizados?(190)
- 3- Considere o conjunto  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ . Calcular o número de subconjuntos de  $A$  com 3 elementos. (10)
- 4- Considere o conjunto  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ . Calcular o número de subconjuntos de  $A$  que formam números distintos de três algarismos.(60)
- 5- Quantos anagramas têm a palavra PALMITO?(5040)
- 6- Quantos anagramas têm a palavra PALMITO começando com a letra P?(720)

#### § 7 – Arranjos completos

São arranjos em que todos os elementos podem aparecer repetidos em cada grupo de  $p$  elementos.

$$A_r(n, p) = n^p.$$

### § 8 – Permutação com elementos repetidos

Se entre os  $n$  elementos de um conjunto, existem  $a$  elementos repetidos,  $b$  elementos repetidos,  $c$  elementos repetidos e assim sucessivamente, o número total de permutações que podemos formar é dado por:

$$P_n^{(a,b,c,\dots)} = \frac{n!}{a!b!c!\dots}$$

### § 9 – Combinações completas

$$C(n, p) = C_{(n+K-1, K)} = (n + K - 1) / K$$

### § 10 - Exemplos:

- 1- Quantas placas de automóveis podem ser formadas, tendo cada uma das letras de um alfabeto de 26 letras, seguidas de 4 algarismos do sistema decimal de numeração?(175760000)
- 2- Quantas são os anagramas da palavra MACACA? (60)
- 3- De quantas maneiras uma oficina pode pintar 5 automóveis iguais, recebendo cada um, tinta de uma única cor, se a oficina dispõe apenas de três cores e não quer misturá-las?(21)

## Capítulo 4 – Probabilidade

### § 1 – Ponto amostral, espaço amostral e evento

Ao realizarmos uma experiência com um número finito de resultados, todos com a “mesma chance”, dizemos que:

- **Ponto amostral** é qualquer um dos resultados possíveis.
- **Espaço amostral** é o conjunto de todos os resultados possíveis. Representaremos o espaço amostral por  $S$  e o número de elementos do espaço amostral por  $n(S)$ .
- **Evento** é qualquer subconjunto do espaço amostral. Representaremos o evento por  $A$  e o número de elementos do evento por  $n(A)$ .

### § 2 – Conceito de probabilidade

A probabilidade de ocorrer um **evento A**, representada por  $P(A)$ , de um espaço amostral  $S \neq \emptyset$ , é o quociente entre o número de elementos de  $A$  e o número de elementos de  $S$ .

Simbolicamente:

$$P(A) = n(A)/n(S)$$

Na prática, costuma-se dizer que a probabilidade é o quociente entre o número de casos favoráveis, que é  $n(A)$ , e o número de casos possíveis, que é  $n(S)$ .

Exemplo:

Na experiência de jogar um dado honesto de seis faces, numeradas de 1 a 6, e fazer a leitura da face voltada para cima, temos:

- a- o ponto amostral é a face numerada ou apenas o número.
- b- O espaço amostral é o conjunto  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- c- O número de elementos do espaço amostral é  $n(S) = 6$ .
- d- O evento número par é o conjunto  $A1 = \{2, 4, 6\} \subset S$
- e- O número de elementos do evento número par é  $n(A1) = 3$
- f- A probabilidade do evento *número par* é de  $1/2$ , pois

$$P(A1) = n(A2)/n(S) = 3/6 = 1/2$$

### § 3 – Probabilidade condicionada

Dados dois eventos  $A$  e  $B$  de um espaço amostral  $S$ , finito e não vazio, chama-se *probabilidade de B condicionada a A*, à probabilidade de ocorrer  $B$  sabendo que já ocorreu  $A$ . Representa-se  $P(B/A)$ .

#### § 4 – Eventos independentes

Dois eventos  $A$  e  $B$  de um espaço amostral  $S$ , finito e não vazio, são independentes se, e somente se:

$$P(A/B) = P(A) \text{ e } P(B/A) = P(B)$$

#### § 5 – Intersecção de eventos

Se  $A$  e  $B$  forem dois eventos de um espaço amostral  $S$ , finito e não vazio, então:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Se  $A$  e  $B$  forem eventos independentes, então  $P(B/A) = P(B)$ ,  $P(A/B) = P(A)$  e, portanto:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

## *Desafio*

### § 1 – O problema dos chapéus:

Em uma caverna escura existem 2 chapéus brancos e 3 pretos. Três pessoas entraram na caverna e sem ver a cor do chapéu escolheram um aleatoriamente.

Essas três pessoas saíram em fila indiana, de forma que a de trás visse os 2 chapéus a sua frente, a segunda podia ver o chapéu da primeira que por sua vez não podia ver nenhum chapéu. Pergunta-se ao último da fila sobre a cor do seu chapéu e ele responde que não sabe. Pergunta-se ao do meio e ele também não sabe.

Finalmente pergunta-se ao primeiro, que após ouvir as respostas de seus colegas diz a cor do chapéu que veste!

Você saberia dizer que cor é essa?

### *Resposta*

*Imagine a fila indiana da esquerda para direita: X-Y-Z e os chapéus:*

1) *X é o último da fila. Ele diz “não sei”.*

*Isso significa que ele não viu BB na sua frente (se tivesse visto, teria dito “o meu é P”).*

*Portanto X viu na frente BP ou PB ou PP.*

2) *Y também disse “não sei”.*

3) *Z pensou:*

*Se o meu fosse B, Y saberia que o dele é P (já que a probabilidade BB estava eliminada); Mas Y disse “não sei”; portanto o meu é P.*

## ***Referências Bibliográficas***

***S.B.M.*** - Revista do Professor de Matemática, 54, 2004.

***S.B.M.*** - Revista do Professor de Matemática, 58, 2005.

***S.B.M.*** - Revista do Professor de Matemática, 59, 2006.

***Bianchini, Edwaldo. Paccola, Herval.*** –Matemática, versão alfa, 1995.

***Álgebra1***, Coleção objetivo.

***Álgebra2***, Coleção objetivo.