Teoria das Probabilidades

Qual a probabilidade de eu passar no vestibular?

Leandro Augusto Ferreira

Centro de Divulgação Científica e Cultural
Universidade de São Paulo

São Carlos - Abril / 2009

Sumário

Capítulo 1

Teoria de Conjuntos

Faremos neste capítulo uma breve revisão da teoria de conjuntos.

Definição 1.0.1 *O Agrupamento de elementos de uma determinada classe é dito ser **conjunto**.*

Letras maíusculas, por exemplo $A, B, \ldots, Y, Z$, indicarão conjuntos. A letra grega Ω (ômega) representará o *conjunto universo.* Letras minúsculas $a, b, \ldots, y, z$, indicarão elementos desses conjuntos.

Exemplo 1.0.1 *A seguir, daremos exemplos de conjuntos.*

- *Conjunto das vogais,* $A = \{a, e, i, o, u\}$
- *Conjunto dos números* 1*,* 7 *e* 9*,* $B = \{1, 7, 9\}$
- *Conjunto dos números Naturais,* $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Escreveremos $a \in A$, indicando que o elemento a pertence ao conjunto A. Se todo elemento de um conjunto A é também elemento de um conjunto B, diremos que $A \subset B$.

Diremos que um conjunto é igual a outro, por exemplo, $A = B$, quando $A \subset B$ e $B \subset A$.

Seja A um conjunto finito, indicaremos por $\#A$ o número de elementos A.

Dados dois conjuntos A e B indicaremos por $A \cup B$ o conjunto dos elementos que pertencem a A **ou** a B. Chamaremos este conjunto de A **união** com B.

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Exemplo 1.0.2 *Se* $A = \{1, 4, 3, 5\}$ *e* $B = \{4, 2, 1\}$*, então* $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Exemplo 1.0.3 *Se* $A = \{3, 4, 5\}$ *e* $B = \{2, 1, 6\}$*, então* $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exemplo 1.0.4 *Se* $A = \{3, 4\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, 4\}$*, então* $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} = B$.

Dados dois conjuntos A e B indicaremos por $A \cap B$ o conjunto dos elementos que pertencem a A **e** a B. Chamaremos este conjunto de A **intersecção** com B.

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Exemplo 1.0.5 *Se $A = \{1,4,3,5\}$ e $B = \{4,2,1\}$, então $A \cap B = \{1,4\}$.*

Exemplo 1.0.6 *Se $A = \{3,4,5\}$ e $B = \{2,1,6\}$, então $A \cap B = \emptyset$ (A e B são disjuntos).*

Exemplo 1.0.7 *Se $A = \{3,4\}$ e $B = \{1,2,3,4\}$, então $A \cap B = \{1,2,3,4\} = A$.*

Dados um conjunto A, chamaremos conjunto complementar de A o conjunto dos elementos de Ω que não pertencem a A, de forma equivalente:

$$A^c = \{x \in \Omega \ \mid \ x \notin A\}$$

PROPRIEDADE 1.0.1 *Vejamos algumas propriedades de conjuntos:*

1. *Para todo conjunto $A \subset \Omega$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.*
2. *$A \subset B$ se e somente se $A \cup B = B$.*
3. *$A \subset B$ se e somente se $A \cap B = B$.*
4. *$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.*
5. *$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.*
6. *$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.*
7. *$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.*
8. *$A \cup A^c = \Omega$, $A \cap A^c = \varnothing$, $(\varnothing)^c = \Omega$, $\Omega^c = \varnothing$.*
9. *$(A^c)^c = A$; $A \subset B$ se e somente se $B^c \subset A^c$.*
10. *$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.*
11. *$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.*

Exercícios

1. Preencha o espaço vazio coma relação apropriada para cada caso:

   a) $\{a\}$____$\{1, 2, a, b\}$
   b) $\{a, 1, 2\}$____$\{1, 2\}$
   c) a____$\{1, 2, a, b\}$
   d) $\emptyset$____$\{1, 2, a, b\}$
   e) $\{1, 2, 3\}$____$\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3\}$

2. Qual a relação entre os dois conjuntos $A = \{x \mid x > 2\}$ e $B = \{x \mid x \geq 2\}$?

3. Escreva os conjuntos abaixo, explicitando todos os seus elementos:

   a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x < 5\}$
   b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 = 0\}$
   c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 = 0\}$
   d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 3 = 7\}$

4. Determine:

   a) $A \cap B$
   b) $C \cup B$
   c) $A \cup C$
   d) $D \cap B$
   a) $A \cup D$
   b) $C \cap B$
   c) $C \cap A$
   d) $D \cap A$

Capítulo 2

Análise Combinatória

2.1 Princípios aditivo e multiplicativo

Utilizaremos no desenvolvimento desse capítulo os princípios aditivos de multiplicativos, e veremos que podemos construir métodos mais complexos da análise combinatória (permutações, arranjos e combinações) através desses princípios.

Exemplo 2.1.1 *Suponha que tenham entrado em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro e que Carlos tenha dinheiro para assistir a apenas 1 evento. Quantos são os programas que Carlos pode fazer no sábado?*

Se ele tem dinheiro para ver apenas 1 evento, então ou ele assiste a um filme **ou** a um teatro, como temos 3 filmes e 2 peças, Carlos assistirá $3 + 2 = 5$ filmes.

Exemplo 2.1.2 *Se no exemplo anterior, Carlos tiver dinheiro para assistir a um filme e a uma peça, quantos são os programas ao todo que ele pode fazer?*

Carlos pode escolher entre 1 filme **e** 1 peça, como temos 3 filmes e 2 peças, temos $2 \cdot 3 = 6$ peças.

Os Exemplos obedecem a um mesmo princípio básico que chamamos de *princípio aditivo*. Se A e B são dois conjuntos $(A \cup B = \emptyset)$ com, respectivamente, p e q elementos, então $(A \cap B)$ possui $p+q$ elementos. No exemplo podemos identificar os conjuntos

$$A = \{x \mid x \text{ é um filme}\} = \{F_1, F_2, F_3\}, \text{e}$$

$$B = \{x \mid x \text{ é uma peça de teatro}\} = \{P_1, P_2\},$$

Desta forma, $A = \{x \mid x \text{ é um filme ou úma peça de teatro}\} = \{P_1, P_2, F_1, F_2, F_3\}$.

O Exemplo obedece a um outro princípio básico de contagem que chamaremos de *princípio multiplicativo*: Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e , se para cada um dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A sequido do evento B é $m \cdot n$. No exemplo , podemos tomar como evento A a escolha do Filme (que são 3) e como evento B é $m \cdot n$.

Exemplo 2.1.3 *De quantas maneiras podemos dar 2 prêmios a uma classe com 10 rapazes, de modo que os prêmios não sejam dados a um mesmo rapaz?*
Solução:

Exemplo 2.1.4 *De quantas maneiras podemos dar 2 prêmios a uma classe com 10 rapazes, se é permitido que ambos sejam dados a um mesmo rapaz?*
Solução:

Exemplo 2.1.5 *Um amigo mostrou-me 5 livros diferentes de matemática, 7 livros diferentes de física e 10 livros diferentes de química e pediu-me para escolher 2 livros com a condição de que eles não fossem da mesma matéria. De quantas maneiras eu posso escolhê-los?*
Solução:

Exemplo 2.1.6 *De quantas maneiras 2 pessoas podem estacionar seus carros numa garagem com 6 vagas?*
Solução:

Exemplo 2.1.7 *Quantos são os anagramas de 2 letras diferentes que podemos formar com um alfabeto de 23 letras?*
Solução:

Exemplo 2.1.8 *De quantas maneiras podemos escolher 1 consoante e 1 vogal de um alfabeto formado por 18 consoantes e 5 vogais?*
Solução:

Exemplo 2.1.9 *Há 12 moças e 10 rapazes, onde 5 deles (3 moças e 2 rapazes) são irmãos e os restantes não possuem parantesco. Quantos são os casamentos possíveis?*
Solução:

Exemplo 2.1.10 *Quantos números de 3 algarismo distintos podemos formar com os dígitos 5, 6 e 7?*
Solução:

Exercícios

1. Quantas palavras contendo 3 letras diferentes podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras?
2. Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla-escolha, com cinco alternativas por questão?
3. Quantos inteiros há entre 1000 e 9999 cujos algarismos são distintos?
4. De quantos modos diferentes podem ser escolhidos um presidente e um secretário de um conselho que tem 12 membros?
5. De quantos modos podemos arrumar 8 torres iguais em um tabuleiro de xadez de modo que não haja duas torrs na mesma linha nem na mesma coluna?
6. Em um concurso há três candidatos e cinco examinadores, devendo cada examinador votar em um candidato. De quantos modos os votos podem ser distribuidos?

2.2 Permutações Simples

Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, de quantos modos é possível ordená-los?

O número de modos de ordenar n objetos distintos é

$$n(n-1)\ldots 1 = n!$$

cada ordenação dos n objetos é chamada uma *permutação simples* de n objetos e o número de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n. Assim,

$$P_n = n!$$

Exemplo 2.2.1 *Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, quantos subconjuntos de 2 elementos A possui?*
Solução:

Exemplo 2.2.2 *Considerando os algarismo 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números de 3 algarismos distintos podem ser formados?*
Solução:

Exemplo 2.2.3 *Quantos são os divisores do número 12 6000?*
Solução:

Exemplo 2.2.4 *De quantas maneiras 12 moças e 12 rapazes podem formar pares para uma dança?*
Solução:

Exemplo 2.2.5 *Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas usando-se apenas as cores amarelo, branco e cinza, não devendo listas adjacentes ter a mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira?*
Solução:

Exemplo 2.2.6 *As placas dos automóveis são formadas por 3 letras seguidas por 4 algarismos. Quantas placas podem ser formadas?*
Solução:

Exercícios

1. Quantos são os anagramas da palavra CAPÍTULO?
2. De quantos modos é possível sentar 7 pessoas em cadeiras em fila de modo que duas determinadas pessoas dessas 7 não fiquem juntas?
3. Quantas são as maneiras de 6 carros serem estacionados em 6 vagas?
4. Considerando os algarismo 0, 1, 4 e 5, quantos números de 3 algarismos distintos podem ser formados?
5. Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA? Quantos começam com a letra A?

2.3 Arranjos Simples

Dados n objetos, se os tomarmos p a p, onde $n \geqslant 1$ e $p \leqslant n$, formaremos grupos de p elementos distintos, que **diferem entre si pela ordem**, e o chamaremos de *Arranjo Simples*. Denotaremos por A_n^p.

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo 2.3.1 *Quantos anagramas de 2 letras diferentes podemos formar com um alfabeto de 23 letras?* ***Solução:***

Exemplo 2.3.2 *Considerando os dígitos 1, 2, 3, 4 e5, quantos números de 2 algarismos diferentes podem ser formados?* ***Solução:***

Exemplo 2.3.3 *Quantos inteiros entre 1000 e 9999 têm dígitos distintos e*

a) são números pares?

b) consistem inteiramente de dígitos ímpares?

Solução:

Exercícios

1. De quantas maneiras diferentes podemos embalar três anéis distintos se dispomos de cinco caixinhas coloridas (de cores diferentes), sabendo que cada caixa pode conter apenas um anel?

2. Quantas palavras podemos formar com as 20 primeiras letras do nosso alfabeto?

3. De quantas maneiras podemos ordenas as letras a, a, b, b, c, c, d, d, de forma que letras iguais nunca fiquem juntas?

2.4 Combinações Simples

Dados n objetos, se os tomarmos p a p, onde $n \geqslant 1$ e $p \leqslant n$, formaremos grupos de p elementos distintos, que ***não*** **diferem entre si pela ordem**, e o chamaremos de *Combinações Simples*. Denotaremos por C_n^p ou $\binom{n}{p}$.

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplo 2.4.1 *Quantas saladas contendo exatamente 4 frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes?* ***Solução:***

Exemplo 2.4.2 *De quantos modos podemos escolher 6 pessoas, incluindo pelo menos duas mulheres, em um grupo de 7 homens e 4 mulheres?*

Solução:

Exemplo 2.4.3 *De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em 2 grupos de 4 pessoas cada?*

Solução:

Exemplo 2.4.4 *De quantos modos é possível dividir 20 pessoas:*

a) em dois grupos de 10?

b) em quatro grupos de 5?

c) em um grupo de 12 e um de 8?

d) em três grupos de 6 e um de 2?

Solução:

Exemplo 2.4.5 *Quantos jogos simples(6 dezenas) podemos fazer na megasena, cuja cartela de jogo possui 60 dezenas?*

Solução:

Exemplo 2.4.6 *Quantos subconjuntos possuem um conjunto A com n elementos?*

Solução:

Exercícios

1. De quantas maneiras é possivel colocar 6 anéis diferentes em 4 dedos?

2. Um indivíduo possui 25 livros diferentes. De quantas formas distintas ele poderá empacotar tais livros em grupos de 6 livros?

3. Quantos grupos de 3 pessoas pode ser montado com 8 pessoas?

4. Quantos grupos de 2 pessoas pode ser montado com 1000 pessoas?

5. Quantas combinações com 4 elementos podem ser montadas com as 10 primeiras letras do alfabeto?

6. Quantas combinações com 4 elementos podem ser montadas com as 10 primeiras letras do alfabeto, de tal forma que sempre comecem pela letra A?

7. Quantas combinações com 4 elementos podem ser montadas com as 10 primeiras letras do alfabeto, de tal forma que sempre estejam juntas as letras A e B?

8. Quantas combinações com 4 elementos podem ser montadas com as 10 primeiras letras do alfabeto, de tal forma que não contenham nem as letras A e B?

9. Quantas combinações com 4 elementos podem ser montadas com as 10 primeiras letras do alfabeto, de tal forma que somente uma das letras A ou B esteja presente, mas não as duas?

10. Quantas combinações com 4 elementos podem ser montadas com as 10 primeiras letras do alfabeto, de tal forma que contêm 2 dentre as 3 letras A,B e C?

11. Em uma sala existem 40 pessoas, 18 mulheres e 22 homens. Quantas comissões podem ser montadas nesta sala contendo 3 mulheres e 5 homens?

12. Calcular o valor de m tal que $5C^3_{m+1} = 2C^2_{m+2}$.

13. Quantos triângulos podem ser traçados contendo pontos de duas retas paralelas, sabendo-se que em uma reta existem 6 pontos e na outra reta existem 5 pontos?

14. Quantos quadriláteros convexos podem ser traçados contendo pontos de duas retas paralelas, sabendo-se que em uma reta existem 6 pontos e na outra reta existem 5 pontos?

15. Em uma classe com 16 pessoas, há 10 homens e 6 mulheres. Consideremos H um certo homem e M uma certa mulher. Quantos grupos podemos formar: com 4 homens e 2 mulheres? contendo H mas não M? contendo M mas não H? contendo H e M? contendo somente H ou somente M?

16. Para resolver um assunto entre 6 professores e 4 alunos, desejamos formar comissões contendo 3 professores e 2 alunos. Quantas são as possibilidades?

17. Desejamos formar comissões de 6 pessoas entre cinco pais de alunos e quatro professores. Quantas comissões terão somente 1 professor?

18. Desejamos formar comissões de 6 pessoas entre cinco pais de alunos e quatro professores. Quantas comissões terão somente 2 professores?

19. Desejamos formar comissões de 6 pessoas entre cinco pais de alunos e quatro professores. Quantas comissões terão no mínimo 2 professores?

20. Desejamos formar comissões de 6 pessoas entre cinco pais de alunos e quatro professores. Quantas comissões terão no mínimo 3 professores?

21. Num plano existem 4 pontos, sendo que 3 deles são não colineares. Qual é o número possível de retas que passam por esses pontos?

Capítulo 3

Probabilidade

3.1 Espaço Amostral

Consideremos o seguinte experimento aleatório: jogue um dado e observe o número mostrado na face de cima.

A primeira tarefa consiste em descrever todos os possíveis resultados do experimento e calcular o seu número. Este conjunto é chamado *Espaço Amostral*. É fácil descrevê-lo em nosso exemplo:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \qquad \#(\Omega) = 6$$

Os elementos do espaço amostral são chamados *eventos elementares*. Os subconjuntos do espaço amostral serão chamados *eventos*. Por exemplo, o conjunto

$$A = \{1, 3, 5\}$$

é o *evento* que acontece se o número mostrado na face de cima é ímpar, e

$$B = \{2, 4, 6\}$$

é o *evento* que acontece se o número mostrado na face de cima é par.

Para calcularmos a probabilidade de um determinado evento A acontecer num determinado espaço amostral Ω, realizamos a seguinte conta

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega},$$

por exemplo, usando $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$, podemos calcular a probabilidade de A e B acontecerem, sendo

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Faremos alguns exemplos para fixarmos os conceitos apresentados acima.

Exemplo 3.1.1 *Três moedas são jogadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de obter 2 caras? Qual é a probabilidade de obter pelo menos 2 caras?*
Solução:

Exemplo 3.1.2 *Dois dados são jogados simultaneamente. Calcule a probabilidade de que a soma dos números mostrados nas faces de cima seja 7.*
Solução:

PROPRIEDADE 3.1.1 *Vejamos algumas propriedades sobre probabilidade:*

1. $0 \leq P(A) \leq 1$, *para todo evento* A *de* Ω
2. $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$
3. *Se* A *e* B *são eventos disjuntos, então* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
4. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemplo 3.1.3 *Um número entre 1 e 300 é escolhido aleatóriamente. Calcular a probabilidade de que ele seja divisível por 3 ou 5.*

Solução:

Exemplo 3.1.4 *Um torneio é disputado por 4 times A, B, C e D. É 3 vezes maior a chance de que A vença do que B, 2 vezes mais provável que B vença do que C e é 3 vezes mais provável que C vença do que D. Quais as probabilidades de ganhar para cada um dos times?* ***Solução:***

Exemplo 3.1.5 *Uma caixa contém 20 peças em boas condições e 15 em más condições. Uma amostra de 10 peças é extraída. Calcular a probabilidade de que ao menos uma peças na amostra seja defeituosa.*
Solução:

Exemplo 3.1.6 *Qual é a probabilidade de ganhar na megasena com um único jogo simples (6 dezenas)?*
Solução:

Exercícios

1. Uma cidade tem 30 000 habitantes e três jornais A, B e C. Uma pesquisa de opinião revela que:

   - 12 000 leem A;
   - 8 000 leem B;
   - 7 000 leem A e B;
   - 6 000 leem C;
   - 4 500 leem A e C;
   - 1 000 leem B e C;
   - 500 leem A, B e C;

   Qual é a probabilidade de que um habitante leia:

   a) pelo menos um jornal.

   b) só um jornal.

2. Qual a probabilidade de a placa de um carro começar com a letra A e terminar com 56?

3. A senha de um cadeado possui 6 digítos, qual a probabilidade de se acertar a senha com apenas uma tentativa?

4. Jogamos um dado e uma moeda, qual a probabilidade de tirarmos cara e um primo?

5. Dez pessoas são separadas em dois grupos de 5 pessoas cada. Qual é a probabilidade de que duas pessoas determinadas A e B façam parte do mesmo grupo?

6. Qual a probabilidade de uma pessoa ganhar na Megasena um jogo de 7 dezenas?

7. Três dados são jogados simulktaneamente. Calcular a probabilidade de obnter 12 como soma dos resultados dos três dados.

8. * Em um armário há n pares de sapatos. Retiram-se ao acaso p pés de sapatos desse armário. Qual a probabilidade de havar entre esses pés exatamente k pares de sapatos?

3.2 Probabilidade Condicional

Consideraremos o experimento que consiste em jogar um dado *não-viciado*. Sejam $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 2, 4\}$. Temos que $P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Esta é a probabilidade de B antes que o experimento se realize. Suponhamos que, uma vez realizado o experimento, alguém nos informe que o resultado do mesmo é um número par, isto é, que A ocorreu. Nossa opinião sobre a ocorrência de B se modifica com esta informação, jká que, então, somente poderá ter ocorrido B se o resulçtado do experimento tiver sido 2. Esta opinião é qualificada com a introdução de uma "probabilidade condicional", denotaremos com *probabilidade condicional de B dado A*, definida por

$$\frac{(B \cap A)}{A} = 13,$$

de forma mais geral, dizemos:

Definição 3.2.1 *Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de B da do A é o número $P(A \cap B)/P(A)$. Representaremos este número pelo símbolo $P(B/A)$. Desta forma, temos:*

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemplo 3.2.1 *Um grupo de pessoas está classificado da seguinte maneira:*

	Fala Inglês	*Fala Alemão*	*Fala Francês*
Homens	*92*	*35*	*47*
Mulheres	*101*	*33*	*52*

Escolhe-se uma pessoas ao acaso. Sabendo-se que esta pessoa fala francês, qual é a probabilidade de que seja homem?

Solução:

Exemplo 3.2.2 *Sabe-se que 80% dos pênaltis marcados a favor do Brasil são cobrados por jogadores do Flamengo. A probabilidade de um pênalti ser convertido é de 40% se o cobrador for do Flamengo e de 70% em caso contrário. Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser marcado, qual a probabilidade do pênalti ser cobrado por um jogador do Flamengo e ser convertido?*

Solução:

Exemplo 3.2.3 *No exemplo anterior, qual a probabilidade do penâlti ser convertido?*

Solução:

Exemplo 3.2.4 *Consideremos dos dados: um deles equilibrado e outro viciado* $P(\{1\}) = \frac{1}{2}$ *e* $P(\{2\}) = \ldots = P(\{6\}) = \frac{1}{10}$. *Escolhe-se um dos dados ao acaso e se efetuam dois lançamentos, obtendo-se dois uns. Qual a probabilidade de que o dado escolhido tenha sido o viciado?*

Solução:

Exemplo 3.2.5 *Marina escreve uma carta a Verônica. A probabilidade de que Marina escreva a carta é de* $\frac{8}{10}$. *A probabilidade de que o correio não a perca é de* $\frac{9}{10}$. *A probabilidade de que o correio a entregue é de* $\frac{9}{10}$. *Dado que Verônica* *não recebeu a carta, qual a probabilidade condicional de que Marina não a tenha escrito?*

Solução:

Exercícios

1. Escolhe-se ao acaso um número entre 1 e 50. Se o número é primo, qual é a probabilidade de que seja ímpar?

2. Uma moeda é jogada 6 vezes. Sabendo-se que no primeiro lançamento deu coroa, calcular a probabilidade condicional de que o número de caras nos seis lançamentos supere o número de coroas.

3. Um estudante resolve um teste com questões do tipo verdadeiro-falso. Ele sabe dar a solução correta para 40% da questões. Quando ele responde uma questão cuja solução conhece, dá a resposta correta, e nos outros casos decide na cara ou coroa. Se uma questão foi respondida corretamente, qual a probabilidade de que ele sabia a resposta?

4. Sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas de um baralho comum (52 cartas). Calcule a probabilidade de a 1^a carta ser uma dama e a 2^a ser copas.

5. Um exame de laboratório tem eficiência de 95% para detectar uma doença quando essa doença existe de fato. Entretanto o teste aponta um resultado "falso positivo" para 1% da pessoas dadias testadas. Se $0,5\%$ da população tem a doença, qual é a probabilida de uma pessoa ter doença dado que o exame foi positivo?

3.3 Distribuição Binomial

Consideremos agora um experimento com apenas dois resultados possíveis, que chamaremos de *sucesso* e *fracasso.*

Por exemplo:

a) Jogamos uma moeda não viciada e pomos sucesso=cara, *fracasso=coroa.*

b) Jogamos um dado não viciado e colocamos *sucesso=o resultado é 5 ou 6*; *fracasso=o resultado é 1,2,3 ou 4.*

Chamaremos de p a probabilidade de sucesso e $q = 1 - p$ a probabilidade de fracasso.

Suponhamos agora que façamos repetições (provas) do nosso experimento, realizando um número fixo n de vezes.

Assim, por exemplo, no caso $n = 3$ jogamos a moeda três vezes, sacamos sucessivamente 3 bolas da urna.

Suponhamos ainda que a probabilidade p de sucesso mantenha-se constante ao longo das provas. Isso, no exemplo a, significa que a probabilidade de obter cara em qualquer dos lançamentos é $\frac{1}{2}$.

Suponhamos que as provas sejam independentes, isto é, que o resultado de algumas provas não altere as probabilidades dos resultados das demais.

Queremos resolver o seguinte problemas: Qual é a probabilidade de obtermos k sucessos nessas n provas? A resposta para essa pergunta segue do teorema abaixo.

TEOREMA 3.3.1 (TEOREMA BINOMIAL) *A probabilidade de ocorrerem exatamente k sucessos em uma sequencia de n provas independentes, na qual a probabilidade de sucesso em cada prova p, é igual a*

$$\binom{n}{p} p^k (1-p)^{n-k}$$

Exemplo 3.3.1 *Jogamos uma moeda não-viciada 10 vezes. Qual é a probabilidade de obtermos exatamente 5 caras?*

Solução: Pondo sucesso = cara, temos $p = \frac{1}{2}$ em cada e as provas são independentes. Queremos achar a probabilidade de $k = 5$ sucessos em $n = 10$ provas. Pelo *teorema binomial,* a resposta é

$$\binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^5 = \frac{252}{1025} = \frac{63}{256}$$

Exemplo 3.3.2 *Um aluno marca ao acaso as respostas em um teste múltipla-escolha com 10 questões e cinco alternativas por questão. Qual é a probabilidade dele acertar exatamente 4 questões?*

Solução: Pondo sucesso = acerto, temos $p = \frac{1}{2}$ em cada prova, e as provas são independentes.

Solução: A probabilidade p_k de acertar k questões é a probabilidade dele obter em $n = 10$ provas. Pelo teorema binomial,

$$p_k = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(1-\frac{1}{5}\right)^k = \binom{10}{k}\frac{4^{10-k}}{5^{10}}$$

A probabilidade dele acertar exatamente $k = 4$ questões é

$$p_4 = \binom{10}{4}\frac{4^{10-4}}{5^{10}} = \binom{10}{4}\frac{4^6}{5^{10}} = \frac{172032}{1953125} \backsimeq 0,088.$$

Exercícios

1. Um aluno marca ao acaso as respostas em um teste múltipla-escolha com 10 questões e cinco alternativas por questão. Qual é a probabilidade dele acertar **pelo menos** 4 questões?

2. Joga-se uma moeda não-viciada. Qual é a probabilidade de serem obtidas 5 caras antes de 3 coroas?

3. Sacam-se, com reposição, 4 bolas de uma urna que contém 7 bolas brancas e 3 bolas pretas. Qual a probabilidade de serem sacadas 2 bolas de cada cor? Qual seria a resposta no caso sem reposição?

4. Dois adversários A e B disputam um série de 10 partidas. A probabilidade de A ganhar uma partida é 0,6 e não há empates. Qual é a probabilidade de A ganhar a série?

5. Dois adversários A e B disputam um série de partidas. O primeiro que obtiver 12 vitórias ganha a série . Qual é a probabilidade de A ganhar a série sabendo que em cada partida as probabilidades de A e B vencerem são respectivamente 0,4 e 0,6?